PART4 次数下げと部分分数分解

要点整理と公式

要点 ① 分子の次数下げ

分子の次数が分母の次数より大きい分数関数の不定積分は，除法の結果を用いて分子の次数を下げることで，不定積分が求められる形にする。

(ex) 不定積分 $\displaystyle\int\frac{x^2+1}{x-1}dx$ を求める。

$$\begin{array}{r} x+1 \\ x-1\,\big)\,\overline{x^2\qquad+1} \\ \underline{x^2-x\quad} \\ x+1 \\ \underline{x-1} \\ 2 \end{array}$$

$$\frac{x^2+1}{x-1}=\frac{(x-1)(x+1)+2}{x-1}=x+1+\frac{2}{x-1}$$

であるから

$$\int\frac{x^2+1}{x-1}dx=\int\left(x+1+\frac{2}{x-1}\right)dx=\frac{1}{2}x^2+x+2\log|x-1|+C$$

要点 ② 部分分数分解

$\displaystyle\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}$ のように，1 つの分数式をより簡単な分数式の和や差の形で表すことを「　　　　　　　　」するという。部分分数に分解することにより，不定積分が求められる形にする。

(ex) 不定積分 $\displaystyle\int\frac{1}{(2x-1)(x+3)}dx$ を求める。

$\displaystyle\frac{1}{(2x-1)(x+3)}=\frac{\quad}{2x-1}+\frac{\quad}{x+3}$ とおき，分母をはらうと

$1=a(x+3)+b(2x-1)$ 　　　 $1=(a+2b)x+3a-b$

$a+2b=0$，$3a-b=1$ より $a=\dfrac{2}{7}$，$b=-\dfrac{1}{7}$

よって $\displaystyle\int\frac{1}{(2x-1)(x+3)}dx=\int\frac{\frac{2}{7}}{2x-1}+\frac{-\frac{1}{7}}{x+3}dx=\frac{1}{7}\int\left(\frac{2}{2x-1}-\frac{1}{x+3}\right)dx$

$$=\frac{1}{7}\left(\frac{1}{2}\cdot2\log|2x-1|-\log|x+3|\right)+C$$

$$=\frac{1}{7}(\log|2x-1|-\log|x+3|)+C=\frac{1}{7}\log\left|\frac{2x-1}{x+3}\right|+C$$

[MEMO]

4 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int\frac{x^2-3x+1}{x-2}dx$　(2) $\displaystyle\int\frac{2x^3-2x^2+1}{x^2-x}dx$　(3) $\displaystyle\int\frac{x+3}{(x+1)(x+2)}dx$

Point Pickup

分数関数の不定積分

・(分子)÷(分母)を計算し，分子の次数を下げる

・部分分数に分解する

ことにより，不定積分が求められる形に変形する。

第15講 PART4 確認問題

次の不定積分を求めよ。

ただし，選択肢のあるものはその中から選べ。

また，C は積分定数とする。

1 $\displaystyle\int\frac{x^2+2x-1}{x+3}dx=\int\left(x-\boxed{\text{ア}}+\frac{\boxed{\text{イ}}}{x+3}\right)dx$

$=\boxed{\text{ウ}}+C$

[$\boxed{\text{ウ}}$ の選択肢]

① $x^2-3x+2\log|x+3|$　② $\dfrac{1}{2}x^2-x+\log|x+3|$

③ $\dfrac{1}{2}x^2-x+2\log|x+3|$　④ $\dfrac{1}{2}x^2-2x+\log|x+3|$

2 $\displaystyle\int\frac{2x^3+2x^2+1}{x^2+x}dx=\int\left\{\boxed{\text{エ}}x+\frac{\boxed{\text{オ}}}{x(x+1)}\right\}dx$

$=\boxed{\text{カ}}+C$

[$\boxed{\text{カ}}$ の選択肢]

① $x^2+\log|x(x+1)|$　② $x^2+\log\left|\dfrac{x}{x+1}\right|$

③ $x^2-\log\left|\dfrac{x}{x+1}\right|$　④ $2x^2+\log\left|\dfrac{x}{x+1}\right|$

3 $\displaystyle\int\frac{3x+5}{(x+1)(x+3)}dx=\int\left(\frac{\boxed{\text{キ}}}{x+1}+\frac{\boxed{\text{ク}}}{x+3}\right)dx$

$=\boxed{\text{ケ}}+C$

[$\boxed{\text{ケ}}$ の選択肢]

① $\log|(x+1)(x+3)|$　② $\log\left|\dfrac{x+1}{x+3}\right|$

③ $\log(x+1)^2|x+3|$　④ $\log|x+1|(x+3)^2$

PART4 次数下げと部分分数分解

4 次の不定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int\frac{x^2-3x+1}{x-2}dx$　(2) $\displaystyle\int\frac{2x^3-2x^2+1}{x^2-x}dx$　(3) $\displaystyle\int\frac{x+3}{(x+1)(x+2)}dx$

[解答]

(1) $$\int\frac{x^2-3x+1}{x-2}dx=\int\left(x-1-\frac{1}{x-2}\right)dx=\frac{1}{2}x^2-x-\log|x-2|+C$$

(2) $\displaystyle\frac{2x^3-2x^2+1}{x^2-x}=2x+\frac{1}{x^2-x}=2x+\frac{1}{x(x-1)}=2x+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}$ より

$$\int\frac{2x^3-2x^2+1}{x^2-x}dx=\int\left(2x+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}\right)dx=x^2+\log|x-1|-\log|x|+C$$

$$=x^2+\log\left|\frac{x-1}{x}\right|+C$$

(3) $\displaystyle\frac{x+3}{(x+1)(x+2)}=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x+2}$ とおき，分母をはらうと

$x+3=a(x+2)+b(x+1)$

$x+3=(a+b)x+2a+b$

$a+b=1$，$2a+b=3$ より $a=2$，$b=-1$

よって

$$\int\frac{x+3}{(x+1)(x+2)}dx=\int\left(\frac{2}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)dx=2\log|x+1|-\log|x+2|+C$$

$$=\log(x+1)^2-\log|x+2|+C=\log\frac{(x+1)^2}{|x+2|}+C$$

第15講 PART4 確認問題 解答

1

[正解] ア：1，イ：2，ウ：③

[解説]

$$\frac{x^2+2x-1}{x+3}=\frac{(x+3)(x-1)+2}{x+3}=x-1+\frac{2}{x+3}$$

[A]

[A]　分子の次数を下げる。

であるから，

$$\int\frac{x^2+2x-1}{x+3}dx=\int\left(x-1+\frac{2}{x+3}\right)dx$$

$$=\int(x-1)dx+2\int\frac{dx}{x+3}$$

$$=\frac{1}{2}x^2-x+2\log|x+3|+C$$

2

[正解] エ：2，オ：1，カ：②

[解説]

$$\frac{2x^3+2x^2+1}{x^2+x}=\frac{2x^2(x+1)+1}{x(x+1)}$$

$$=2x+\frac{1}{x(x+1)}$$ [B]

[B]　分子の次数を下げる。

であるから，

$$\int\frac{2x^3+2x^2+1}{x^2+x}dx=\int\left\{2x+\frac{1}{x(x+1)}\right\}dx$$

$$=\int\left(2x+\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)dx$$

[C]

[C]　部分分数に分解する。

$$\frac{1}{x(x+1)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$$

$$=x^2+\log|x|-\log|x+1|+C$$

$$=x^2+\log\left|\frac{x}{x+1}\right|+C$$

3　**[正解]** キ：1，ク：2，ケ：④

[解説]

$\dfrac{3x+5}{(x+1)(x+3)}=\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{b}{x+3}$ とおき，分母をはらうと，[D]

$$3x+5=a(x+3)+b(x+1)$$
$$=(a+b)x+(3a+b)$$

これが x についての恒等式であるから，

$$\begin{cases}a+b=3\\3a+b=5\end{cases}$$ [E]

これを解いて，$a=1$，$b=2$

よって，

$$\int\frac{3x+5}{(x+1)(x+3)}dx=\int\left(\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x+3}\right)dx$$
$$=\log|x+1|+2\log|x+3|+C$$
$$=\log|x+1|+\log(x+3)^2+C$$
$$=\log|x+1|(x+3)^2+C$$

[D]　部分分数に分解する。

[E]　x についての恒等式
両辺の係数を比較すると，x の同じ次数の項の係数は等しくなる。